# MATEMATIČKE REKONSTRUKCIJE

Priredila: Sanja Nizić, prof.
OŠ Tučepi, Tučepi

# ŠTO SU TO MATEMATIČKE REKONSTRUKCIJE?

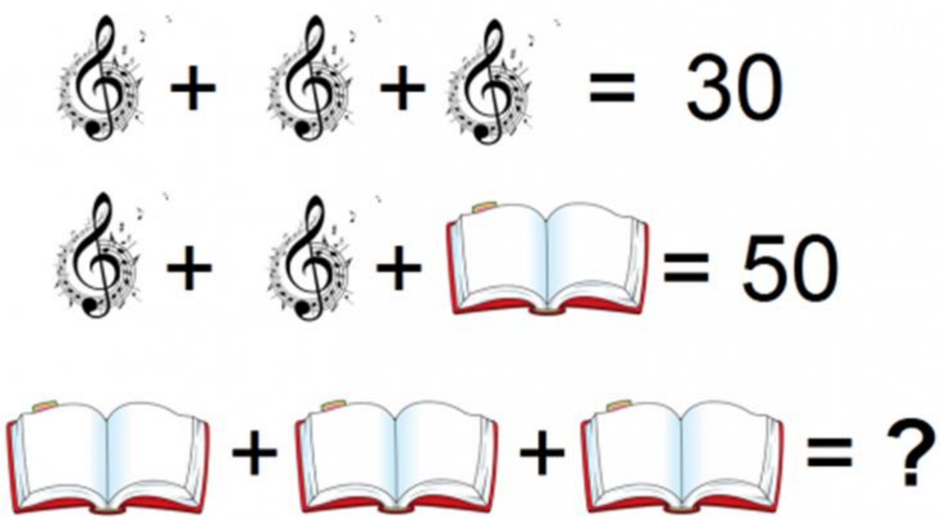
- Zadatci s „nevidljivim znamenkama”

- U ovom predavanju učenicima će se pokazati kako otkriti “nevidljive znamenke” u različitim računskim operacijama (zadaci sa zvjezdicama, matematički rebusi).
- Neki zadatci će se rješavati na više načina. Sve će biti popraćeno velikom količinom primjera.
- Kroz radionicu učenicima će biti omogućeno njihovo sudjelovanje u radu jer se time potiče njihov interes, ali i razmjena ideja s drugim učenicima.

# ISHODI:

- Učenici će moći:
- 1.Rekonstruirati zbrajanje prirodnih brojeva
- 2.Rekonstruirati oduzimanje prirodnih brojeva
- 3.Rekonstruirati množenje prirodnih brojeva
- 4.Rekonstruirati dijeljenje prirodnih brojeva

# ŠTO SE KRIJE IZA UPITNIKA?



# Rješenje:

- 90

# ŠTO SE KRIJE IZA UPITNIKA?

| 7 | 15 |
|---|---|
| 11 | |

| 5 | 13 |
|---|---|
| 9 | |

| 16 | 8 |
|---|---|
| 12 | |

| 2 | 10 |
|---|---|
| ? | |

# RJEŠENJE:

- (7+15):2=11
- (5+13):2=9
- (16+8):2=12
- (2+10):2=6

- Iza upitnika se krije 6.

# ZADATAK 1.

- Umjesto * u računu upiši odgovarajuće znamenke tako da račun   4* + **3 =  **01 bude točan.

# 4* + **3 = **01

**R.** Zadatak možemo napisati u ovom obliku

$$\begin{array}{r} 4* \\ +\ **3 \\ \hline **01 \end{array}$$

U prvom pribrojniku na mjestu jedinica mora biti 8, jer je 3 + 8 = 11. Zbrajanjem desetica 4 + * + 1 = 10 nalazimo da u drugom pribrojniku na mjestu desetica mora biti broj 5. Budući da * + 1 mora dati dvoznamenkasti broj, to na mjestu stotica u drugom pribrojniku mora biti broj 9 Dakle, imamo:

**48 + 953 = 1 001**.

# ZADATAK 2.

- U računu 6*5* - *8*4 = 2856 umjesto zvjezdica upiši odgovarajuće znamenke tako da račun bude točan.

# 6*5* - *8*4 = 2856

**R.** Napišimo zadatak u obliku

$$\begin{array}{r} 6*5* \\ -\ *8*4 \\ \hline 2856 \end{array}$$

Budući da je $6 + 4 = 10$, to na mjestu jedinica u umanjeniku dolazi broj 0. Zbog $1 + 5 + * = 15$, na mjesto desetica u umanjitelju mora doći broj 9. Kako je

$1 + 8 + 8 = 17$,

to će na mjesto stotica u umanjeniku biti 7.

Iz $1 + 2 + * = 6$ slijedi da je u umanjitelju prva znamenka 3. Konačno je, dakle

**6 750 – 3 894 = 2 856.**

# ZADATAK 3.

- Rekonstruiraj množenje:

$$\begin{array}{l} \underline{*2* \cdot *7\qquad} \\ **** \\ \underline{\quad *** \qquad\quad} \\ ****8 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\underline{*2* \cdot *7\quad\quad} \\
**** \\
\underline{\quad ***\quad\quad} \\
****8
\end{array}
$$

**R.** Posljednja znamenka u drugom parcijalnom umnošku je 8, što znači da posljednja znamenka u množeniku mora biti 4, jer je $7 \cdot 4 = 28$. Prva znamenka u množeniku je 1, jer ako bi bila znamenka 2, tada bi drugi parcijalni umnožak bio četveroznamenkasti broj što ne može biti jer je riječ o troznamenkastom broj. Umnožak broja 124 sa prvom znamenkom množitelja je četveroznamenkasti broj, pa prva znamenka u množitelju mora biti 9. Naime, ako bi ona bila, na primjer 8, dobili bismo $124 \cdot 992$ troznamenkasti broj. Prema tome, radi se o množenju

**$124 \cdot 97 = 12\,028$.**

# ZADATAK 4.

- Kod množenja ** ·** umnožak se sastoji od samih četvorki. Rekonstruiraj množenje.

**R.** Umnožak $** \cdot **$ je sigurno manji od 10 000, tj.

$** \cdot ** < 10\,000 \ (= 100 \cdot 100)$,

pa u obzir dolaze samo ove dvije mogućnosti:

ili je $** \cdot ** = 4444$,

ili $** \cdot ** = 444$.

Budući je $4444 = 44 \cdot 101$, a broj 101 je jednostavan broj, to se broj 4444 ne može napisati kao umnožak dvaju dvoznamenkastih brojeva. Zato ova mogućnost otpada.

U drugom slučaju je $444 = 4 \cdot 111 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$, što je moguće prikazati kao umnožak dvaju dvoznamenkastih brojeva i to na jedan jedini način:

$444 = 12 \cdot 37$.

# ZADATAK 5.

- Rekonstruiraj dijeljenje:

$$\begin{array}{l} ****:11=** \\ \underline{-**\quad} \\ \quad 3* \\ \underline{\ -**\quad} \\ \quad =0 \end{array}$$

**R.** Najveći dvoznamenkasti broj djeljiv s 11, a koji je najbliži troznamenkastom broju (od njega se razlikuje samo za 3), je 99. Zato shema dijeljenja ima sada ovaj oblik

```
**** : 11 = 9*
 -99
   3*
  - **
   =0
```

Troznamenkasti broj kojeg čine tri znamenke djeljenika je 99 + 3 = 102. Jedini broj oblika 3* djeljiv sa 11 (bez ostatka) je 33. Shema je sada zadanog dijeljenja

```
1023 : 11 = 93
 -99
   33
  - **
     0
```

ili u konačnosti

```
1023 : 11 = 93
 -99
   33
  - 33
     0
```

# ZADATAK 6.

- Izostavimo li broju $\overline{7abcd}$ znamenku 7 dobit ćemo broj koji je 17 puta manji od polaznog. Odredi taj broj.

**R.** Sa $n$ označimo broj kojeg čine preostale znamenke, tj. znamenke $a$, $b$, $c$, i $d$. Tada je

$70\,000 + n = n \cdot 17.$

Rješavanjem ove jednadžbe nalazimo da je $n = 4\ 375$. Zato je traženi peteroznamenkasti broj **74 375**.

# ZADATAK 7.

- Nekom troznamenkastom broju dopiše se 8, i to jedanput na početku, a drugi put na kraju. Razlika tako dobivenih brojeva je 1107. Odredi nepoznati broj.

**R.** Neka je $\overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj. Ako na početku toga broja upišemo 8 dobit ćemo broj oblika $\overline{8abc}$, odnosno dopisivanjem broja 8 na kraju imamo broj oblika $\overline{abc8}$. Oduzmemo li ta dva broja, dobit ćemo broj 1107. Ovo možemo zapisati ovako:

$$\begin{array}{r} 8abc \\ -\ \ abc8 \\ \hline 1107 \end{array}$$

Odavde se odmah uočava da je $c = 5$, pa sada imamo:

$$\begin{array}{r} 8ab5 \\ -\ \ ab58 \\ \hline 1107 \end{array}$$

Iz posljednjeg oduzimanja zaključujemo da je $b = 6$; imamo:

$$\begin{array}{r} 8a65 \\ -\ \ a658 \\ \hline 1107 \end{array}$$

Sada lako nalazimo da je $a = 7$. Dakle traženi broj je **765**.

# ZADATAK 8.

- Ako šesteroznamenkastom broju izostavimo znamenku 9 na početku dobivamo broj koji je dva puta manji od broja kojeg dobivamo kad mu izostavimo znamenku 8 na kraju. Odredi taj šesteroznamenkasti broj.

**R.** Traženi broj možemo prikazati u obliku $\overline{9abcd8}$ , pa je prema uvjetu zadatka

$$\overline{9abcd} = 2 \cdot \overline{abcd8}.$$

Odavde slijedi da je $d = 6$ jer je $2 \cdot 8 = 16$, pa je

$$\overline{9abc6} = 2 \cdot \overline{abc68}.$$

Kako je $2 \cdot 6 = 12$, $12 + 1 = 13$, $c$ mora biti 3. Zato je sada

$$\overline{9ab36} = 2 \cdot \overline{ab368}.$$

Iz posljednje relacije slijedi da je $b = 7$, jer je $2 \cdot 3 = 6$, $6 + 1 = 7$, pa imamo

$$9736 = 2 \cdot \overline{a7368}.$$

Zbog $2 \cdot 7 = 14$ slijedi da je $a = 4$. Kako je $2 \cdot 4 = 8$, $8 + 1 = 9$, znači da je znamenka $a$ točno određena.

Prema tome, traženi šesteroznamenkasti broj je **947 368**.

# ZADATAK 9.

- Od znamenki 0, 1, 2, … , 9 načini 5 dvoznamenkastih brojeva tako da njihov umnožak bude najveći, a da se pritom svaka znamenka upotrijebi samo jedanput. Koji su to brojevi?

**R.** Budući da umnožak mora biti najveći, očito je da na mjestu desetica moraju biti znamenke koje su veće od onih što se nalaze na mjestu jedinica. Prema tome, imamo ovih pet dvoznamenkastih brojeva

9*, 8*, 7*, 6*, 5*,

gdje mjesto zvjezdica valja rasporediti preostale znamenke: 0, 1, 2, 3 i 4.

Pokazat ćemo da u broju 9* na mjesto zvjezdice mora biti znamenka 0.

Pretpostavimo da iza znamenke 9 dolazi znamenka $a$, a da se 0 nalazi u nekom drugom broju iza znamenke $b$. Promatrat ćemo dakle brojeve

$\overline{9a} = 90 + a$ i $\overline{b0} = 10b + 0$.

Umnožak tih brojeva je

$(90 + a)(10b + 0) = 900b + 10ab.$

Ako znamenka 0 i znamenka $a$ zamjene mjesta, dobit ćemo brojeve 90 i $\overline{ba} = 10b + a$ kojih je umnožak

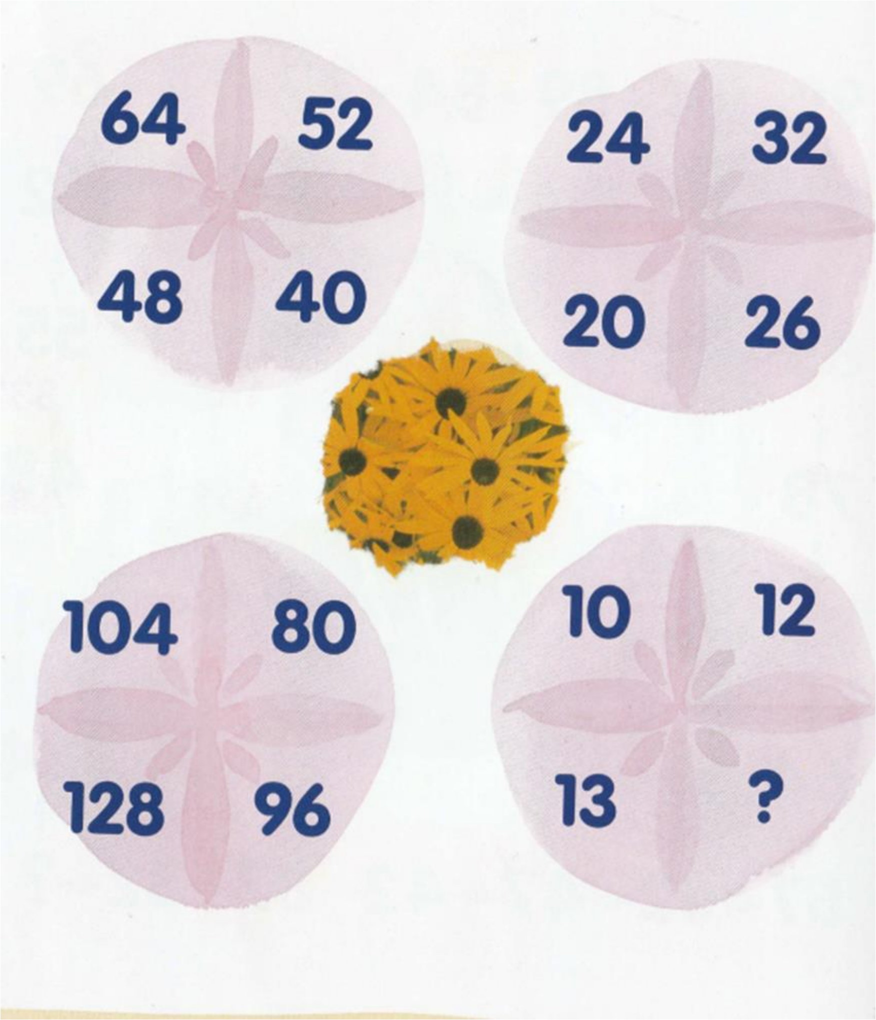
$90(10b + a) = 900b + 90a.$

Budući da je $9 > b$, to je $90 > 10b$ i tada $90a > 10ab$, tj. umnožak tih dvaju brojeva postao je veći pa je, prema tome, i umnožak svih (traženih dvoznamenkastih) brojeva postao veći.

Sličnim zaključivanjem, pokazuje se da sljedeći od traženih brojeva mora biti 81, i tako nastavljamo dalje, odbacujući one kombinacije koje ne daju najveći umnožak.

Traženi brojevi su, dakle: 90, 81, 72, 63 i 54.

# ŠTO SE KRIJE IZA UPITNIKA?



# Rješenje

- 16

# Radionica

# ZADATAK 1.

- Rekonstruiraj množenje:

$$\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba} \quad .$$

**R.** Prvo vidimo da mora biti $a < 3$, jer bi inače $\overline{abcd} \cdot 4$ odnosno $\overline{dcba}$ bio peteroznamenkasti broj. Budući da je broj $\overline{dcba}$ paran (zašto?), to slijedi da mora biti $a \neq 0$ jer $\overline{abcd}$ ne bi bio četveroznamenkasti već troznamenkasti broj. Dakle, moguće je samo $a = 2$. Imamo

$$\overline{2bcd} \cdot 4 = \overline{dcb2}.$$

Sada je $\overline{2bcd} \cdot 4 > \overline{dcb2}$, što je moguće samo kada je $d = 8$. Imamo

$$\overline{2bc8} \cdot 4 = \overline{8cb2}.$$

Znamenka $b$ mora biti manja od 3, tj. $b < 3$, jer je već $2300 \cdot 4 = 9200$, pa bi proizašlo da je $d = 9$ a ne $d = 8$ kao što smo utvrdili. Budući da je broj $\overline{8cb2}$ dobiven množenjem s 4, to znači da je on djeljiv s 4, tj. $\overline{b2}$ mora biti djeljiv s 4 (zašto?). Zbog $b < 3$ to je moguće samo za $\overline{b2} = 12$, tj. kada je $b = 1$. Zato je sada

$$\overline{21c8} \cdot 4 = \overline{8c12}.$$

Pomnoživši 8 s 4 *pamtili* smo 3, a množeći $c \cdot 4$ i dodajući 3 dobiva se broj koji završava znamenkom 1. To je moguće samo kada umnožak $c \cdot 4$ završava znamenkom 8, što je moguće u ova dva slučaja: ili kad je $c = 2$ ili kad je $c = 7$. Konačno imamo: $2\,178 \cdot 4 = 8\,712$.

# ZADATAK 2.

- Rekonstruiraj množenje:

$$a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}\ .$$

**R.** Broj $\overline{bbb}$ možemo napisati u obliku $b \cdot 111$, pa izraz koji treba dešifrirati sada poprima oblik

$$a \cdot b \cdot \overline{ab} = b \cdot 111,$$

a nakon dijeljenja s $b$ imamo $a \cdot \overline{ab} = 111$. Budući da je $111 = 3 \cdot 37$, dobivamo da je $a = 3$, $b = 7$.

# ZADATAK 3.

- Rekonstruiraj dijeljenje:

```
****5 : ** = ***
- *7
   ***
 - ***
     0
```

**R.** Iz prvog oduzimanja *** − *7 = * slijedi da je *7 + * = *** troznamenkasti broj, a to može biti samo onda kada je *7 = 97. Tada će prve tri znamenke djeljenika biti *** = 10*. Umnožak djelitelja (**) s prvom znamenkom količnika je 97; no, kako je 97 jednostavan broj, to djelitelj mora biti ** = 97, a prva znamenka količnika je 1. Iz sheme dijeljenja lako se uviđa da druga znamenka količnika mora biti 0.

Umnožak djelitelja i posljednje znamenke količnika završava znamenkom 5, a to znači da je posljednja znamenka količnika također 5. Dakle, rekonstrukcija zadanog dijeljenja je

$$\begin{array}{l} 10185 : 97 = 105 \\ \underline{-97\phantom{000}} \\ \phantom{-}\,485 \\ \underline{-485} \\ \phantom{-48}0 \end{array}$$

# ZADATAK 4.

- Nađi *A*, *B*, *C*, *D* i *E* tako da svako slovo zamjenjuje jednu znamenku:

$$
\begin{array}{ccccc}
AB & \cdot & A & = & CD \\
+ & & \cdot & & \\
B & : & B & = & E \\
\hline
AD & + & D & = & BA
\end{array}
$$

- R.

Kombiniranjem i uvrštavanjem, pazeći na računske operacije, dobivamo rješenje:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | $\cdot$ | 2 | = | 46 |
| + | | $\cdot$ | | |
| 3 | : | 3 | = | 1 |
| 26 | + | 6 | = | 32 |

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = 2 & D = 6 \\ B = 3 & E = 1 \\ C = 4 & \end{array}}$$

# ZADATAK 5.

- Nađi znamenke a i b tako da sljedeće jednakosti budu točne.

$$a : a = b$$
$$(a + b) \cdot (a + b) = \overline{ab}\ .$$

- Oznaka $\overline{ab}$ znači da se radi o dvoznamenkastom broju kojem je *b* znamenka jedinica, a *a* znamenka desetica.

- R. Zbog $a : a = b$ zaključujemo da je $\boxed{b = 1}$. Izraz $(a+1)\cdot(a+1) = \overline{a1}$ govori nam da pomnožimo li jednu zagradu istom tom zagradom, dobijemo umnožak koji završava znamenkom 1. To može biti samo 81. I, zaista, vrijedi $(8+1)\cdot(8+1) = 81$, pa je $\boxed{a = 8}$.

# ZADATAK 6.

- Ako nekom dvoznamenkastom broju najprije dopišemo 5 na početku, a drugi put na kraju, razlika dobivenih troznamenkastih brojeva je 252. Odredi dvoznamenkasti broj.

**R.** Dvoznamenkasti broj je oblika $\overline{ab}$. Dopišemo mu li znamenku 5 na početku, dobit ćemo broj $\overline{5ab}$, a dopisivanjem znamenke 5 na kraju imamo broj $\overline{ab5}$. Razlika tih dvaju troznamenkastih brojeva je 252, tj.

$\overline{5ab} - \overline{ab5} = 252.$

Sada možemo naznačenu razliku napisati ovako:

$5 \cdot 100 - 10 \cdot a + b - (100 \cdot a + 10 \cdot b + 5) = 252,$

a odavde, nakon sređivanja , dobivamo:

$10 \cdot a + b = 27.$

Budući da je dvoznamenkasti broj dan sa $10 \cdot a + b$, znači da je traženi dvoznamenkasti broj **27**.

# ZADATAK 7.

- Zamijene li  prva i treća znamenka u troznamenkastom broju svoja mjesta, brojevi su jednaki. Koliko ima troznamenkastih brojeva s tim svojstvom?

**R.** Očito je da se radi o troznamenkastom broju kojemu su prva i treća znamenka jednake, tj. radi se o broju oblika $\overline{aba}$ .

Budući da znamenka $a$ može poprimiti sve vrijednosti od 1 do 9 (zašto ne i 0?), a znamenka $b$ sve vrijednosti od 0 do 9, zaključujemo da znamenku $a$ možemo pisati devet puta, a znamenku $b$ deset puta. To znači da takvih troznamenkastih brojeva ima ukupno $9 \cdot 10 = \mathbf{90}$.

32
48

64
222222

42
3721

6
1213

40
452

?
352154

# RJEŠENJE:

- $4 \cdot 8 = 32$
- $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$
- $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
- $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$
- $3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1 = 42$
- $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 = 600$

- Iza upitnika se krije broj 600.

# IZVORI:


- Mirko Polonijo: *Matematički upitnici*, Alfa, Zagreb, 2003
- D. Glasnović Gracin: *Matematika 5 plus*, Element, Zagreb, 2003.
- V. Kadum, Z. Krneta, E. Kosić: *Matematika za one koji žele i mogu više: zbirka zadataka za učenike 5. i 6. razreda osnovne škole*, IGSA, Pula, 2000.
- A. Horvatek: www.antonija.horvatek.hr

- Hvala na pozornosti !