Djeljivost prirodnih brojeva

(dodatna nastava)

Priredila: Sanja Nizić, prof.

OŠ Tučepi, Tučepi

Za početak

Dopuni prva dva stupca tablice.

KWL tablica

Tema: djeljivost prirodnih brojeva

K (now)	W(ant)	L(earn)

Višekratnik i djelitelj

- **Primjer 1.**
- 7 je djelitelj broja 28 (28 : 7 = 4) ili 28 je višekratnik broja 7 (28 = 7 · 4)

- **Primjer 2.**
- Koje su izjave točne? Objasni!
- a) 5 je djelitelj broja 35
- b) 17 je višekratnik broja 3
- c) 13 je višekratnik broja 1
- d) 1 je djelitelj broja 8

Ponovimo djeljivost s nekim brojevima ...

- Djeljivost brojem 2
- Djeljivost brojem 5
- Djeljivost brojem 10
- Djeljivost brojem 3
- Djeljivost brojem 9
- Djeljivost brojem 6

Svojstva djeljivosti

- Ako je broj a djeljiv prirodnim brojem b, kažemo da je broj b djelitelj broja a.
- Ako su pribrojnici djeljivi nekim brojem, onda je i zbroj djeljiv tim brojem.
- Neka za brojeve a i c vrijedi a>c. Ako je a djeljiv brojem b i c djeljiv brojem b, onda je i razlika a-c djeljiva s b.
- Ako je broj a djeljiv brojem b, onda je svaki višekratnik broja a djeljiv sa b.
- Da bi zbroj *a + b*, u kojem je prvi broj djeljiv s *c*, bio djeljiv s *c* potrebno je da i drugi broj bude djeljiv s *c*.
- Da bi razlika *a - b*, u kojoj je umanjenik djeljiv s *c*, bila djeljiva s *c* potrebno je da i umanjitelj bude djeljiv s c.
- Broj nula je djeljiv sa svakim prirodnim brojem. S nulom se ne dijeli.

Ako su pribrojnici djeljivi nekim brojem, onda je i zbroj djeljiv tim brojem.	DJELJIVOST ZBROJA
Neka za brojeve a i c vrijedi a>c. Ako je a djeljiv brojem b i c djeljiv brojem b, onda je i razlika a-c djeljiva s b.	DJELJIVOST RAZLIKE
Ako je broj a djeljiv brojem b, onda je svaki višekratnik broja a djeljiv s b.	DJELJIVOST UMNOŠKA
Ako je broj a djeljiv sa b i broj b djeljiv sa c, onda je broj a djeljiv sa c.	TRANZITIVNOST
Broj nula je djeljiv sa svakim prirodnim brojem. S nulom se ne dijeli.	NULA I DJELJIVOST

Zadatak 1.

- Koje su posljednje tri znamenke umnoška svih prirodnih brojeva od 1 do 17 ?

- Rješenje.
- U tom umnošku pojavljuje se broj 10, zatim faktori 2 i 5 koji pomnoženi daju 10, a također i faktori 12 i 15 čiji je umnožak također djeljiv s 10. Prema tome, umnožak svih tih faktora djeljiv je s $10 \cdot 10 \cdot 10$, tj. s 1000, pa su mu posljednje tri znamenke nule.

Zadatak 2.

- Mogu li se jabuke složene u 40 kutija po 33 jabuke složiti u kutije po 50 jabuka tako da sve kutije budu pune?
- Odgovori bez računanja ukupnog broja jabuka. Odgovor obrazloži.

Zadatak 3.

- Navedi barem 10 djelitelja umnoška 45 i 120.

Zadatak 4.

- Dokaži da je umnožak četiri uzastopna prirodna broja djeljiv s 24.

Rješenje.

- ✓ $a \cdot (a + 1) \cdot (a + 2) \cdot (a + 3)$
- ✓ dva od ova 4 broja su parna, od dva susjedna parna broja jedan je djeljiv s 4, a drugi s 2 → ovaj umnožak je djeljiv s 8
- ✓ od svaka 3 uzastopna broja barem je jedan djeljiv s 3, pa je i umnožak djeljiv s 3
- ✓ budući je umnožak djeljiv s 3 i s 8 zaključujemo da je umnožak djeljiv s $3 \cdot 8 = 24$
- ✓ Time je tvrdnja dokazana.

Zadatak 5.

- Svaki troznamenkasti broj oblika $\overline{aaa}$ djeljiv je s 37. Dokaži!

- *Rješenje.*
- Najmanji broj oblika $\overline{aaa}$ broj je 111. Provjerimo je li djeljiv s 37.
- 111 : 37 = 3
- Budući je 111 djeljiv s 37 i svaki njegov višekratnik je djeljiv s 37.
- Zaključujemo: 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 i 999 djeljivi su s 37.

Djeljivost s nekim brojevima

Prirodan broj	Pravilo
1	Svaki prirodan broj je djeljiv s 1.
2	Prirodan broj je djeljiv s 2 ako završava znamenkama 0, 2, 4, 6 ili 8.
3	Prirodan broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.
4	Prirodan broj je djeljiv sa 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv sa 4.
5	Prirodan broj je djeljiv s 5 ako završava znamenkama 5 ili 0.
6	Prirodan broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv s 2 i s 3.
8	Prirodan broj je djeljiv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8.
9	Prirodan broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.
10	Prirodan broj je djeljiv s 10 ako završava znamenkom 0.
12	Prirodan broj je djeljiv s 12 ako je djeljiv s 3 i sa 4.
15	Prirodan broj je djeljiv s 15 ako je djeljiv s 3 i s 5.
18	Prirodan broj je djeljiv s 18 ako je djeljiv s 2 i s 9.
25	Prirodan broj je djeljiv s 25 ako završava znamenkama 00, 25, 50 ili 75.
100	Prirodan broj je djeljiv sa 100 ako završava znamenkama 00.

Zadatak 6.

- Koliko ima parnih četveroznamenkastih brojeva koji su djeljivi s 5?
- *Rješenje:*
- Ako je broj djeljiv s 5, znamo da završava na 0 ili 5. Budući se u zadatku traže parni brojevi djeljivi s 5, zaključujemo da traženi brojevi završavaju znamenkom 0. Dakle, na mjestu jedinica može biti samo jedna znamenka, a to je 0. Na mjestu desetica možemo staviti bilo koju od 10 znamenki, na mjestu stotica bilo koju znamenku od 0 do 9, a na mjestu tisućica bilo koju znamenku od 1 do 9.
- $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 900$ pa postoji 900 parnih troznamenkastih brojeva djeljivih s 5.

Zadatak 7.

Nađi znamenke x i y tako da broj $\overline{xxyy}$ bude djeljiv s 12.

Rješenje. Prirodan broj je djeljiv s 12 ako je djeljiv s 3 i sa 4. Krenimo od djeljivosti s brojem 4.

Znamo da je broj djeljiv sa 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv sa 4. Zadani je broj oblika $\overline{xxyy}$, pa će biti djeljiv sa 4 ako završava znamenkama 00, 44 ili 88. Dakle, y može biti 0, 4 ili 8.

Za $y = 0$ broj je oblika $\overline{xx00}$. Taj će broj biti djeljiv s 3 ako je $x = 3, 6$ ili 9. Brojevi su: 3 300, 6 600 i 9 900.

Za $y = 4$ broj je oblika $\overline{xx44}$. Taj će broj biti djeljiv s 3 ako je $x = 2, 5$ ili 8. Brojevi su: 2 244, 5 544 i 8 844.

Za $y = 8$ broj je oblika $\overline{xx88}$. Taj će broj biti djeljiv s 3 ako je $x = 1, 4$ ili 7. Brojevi su: 1 188, 4 488 i 7 788.

Traženi brojevi su: 3 300, 6 600, 9 900, 2 244, 5 544, 8 844, 1 188, 4 488 i 7 788. ☑

Zadatak 8.

- Koje sve znamenke možemo upisati umjesto slova a tako da zbroj $\overline{7a85} + \overline{34a5} + \overline{1a21a}$ bude djeljiv s 9? Koliko ima rješenja? (5.r, Županijsko 2005.)

- *Rješenje:*
- Očito je $\overline{7a85}$ =7085 + 100a,

  $\overline{34a5}$ = 3405 + 10a i

  $\overline{1a21a}$ = 10210 + 1001a.
- Prema tome $\overline{7a85}+\overline{34a5}+\overline{1a21a}$ = 20700 + 1111·a.
- Kako je broj 20700 djeljiv s 9 slijedi da broj 1111 · a mora biti djeljiv s 9.
- Kako broj 1111 nije djeljiv niti s 3 niti s 9, slijedi da će broj 1111a biti djeljiv s 9 ako je znamenka a = 0 ili a = 9. Dakle, imamo 2 rješenja.

Djeljivost sa 7

- Osim pravila djeljivosti prirodnih brojeva s 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, itd. mogu se izvesti pravila djeljivosti i s još nekim prirodnim brojevima. Ta pravila nisu jednostavna i djeljivost s drugim brojevima nije jasna na prvi pogled (kao npr. djeljivost s 2 ili 5)

Prirodan broj	Pravilo
7	Prirodan broj djeljiv je sa 7 ako i samo ako je razlika broja desetica i dvostruke znamenke jedinica djeljiva sa 7.
11	Prirodan broj djeljiv je s 11 ako i samo ako je razlika broja desetica i znamenke jedinica djeljiva s 11. ili Prirodan broj djeljiv je s 11 ako i samo ako mu je razlika zbroja znamenaka na parnim mjestima i zbroja znamenaka na neparnim mjestima djeljiva s 11.
13	Prirodan broj djeljiv je s 13 ako i samo ako je razlika broja desetica i deveterostruke znamenke jedinica djeljiva sa 13. ili Prirodan broj djeljiv je s 13 ako i samo ako je zbroj broja desetica i četverostruke znamenke jedinica djeljiv sa 13.
17	Prirodan broj djeljiv je sa 17 ako i samo ako mu je razlika broja desetica i peterostruke znamenke jedinica djeljiva sa 17.
19	Prirodan broj djeljiv je s 19 ako i samo ako je zbroj broja desetica i dvostruke znamenke jedinica djeljiv s 19.

Zadatak 9.

- Je li broj 7203 djeljiv sa 7? A broj 1022?

Rješenje. **a)** Provjeru je li broj 7203 djeljiv sa 7 napravit ćemo u tri koraka.

1. korak: odvojimo znamenku jedinica 720|3;

2. korak: pomnožimo znamenku jedinica s 2; $3 \cdot 2 = 6$;

3. korak: od preostalog dijela broja 7203 oduzmemo dobiveni umnožak $720 - 6 = 714$.

$$720|3 \xrightarrow{\cdot 2} 6 \qquad 720 - 6 = 714$$

Ako je razlika broj djeljiv sa 7, znači da je i početni broj djeljiv sa 7. Ako nije, ponavljamo postupak. Provjerimo je li 714 djeljiv sa 7. Odvojimo li znamenku jedinica i pomnožimo je s 2, dobit ćemo $4 \cdot 2 = 8$. Oduzimamo $71 - 8 = 63$.

$$71|4 \xrightarrow{\cdot 2} 8 \qquad 71 - 8 = 63$$

Znamo da je broj 63 djeljiv sa 7, pa zaključujemo da je i broj 7203 djeljiv sa 7.

b) Provjerimo je li broj 1022 djeljiv sa 7.

Ponavljamo postupak iz primjera a).

$$102|2 \xrightarrow{\cdot 2} 4 \qquad 102 - 4 = 9|8 \xrightarrow{\cdot 2} 16 \qquad 9 - 16 = ? \qquad 16 - 9 = 7$$

Ako nam se dogodi da dođemo do oduzimanja gdje od manjeg broja moramo oduzeti veći (kao npr. ovdje: $9 - 16 = ?$, to nije prirodan broj), onda zamijenimo mjesta umanjenika i umanjitelja. Na taj ćemo način dobiti prirodni broj, a pravilo djeljivosti s brojem 7 će se i dalje očuvati.

Za kraj

Dopuni zadnji stupac KWL tablice.

Zadatci za samostalan rad

- 1. Odredi skup S svih četveroznamenkastih brojeva kojima je znamenka tisućica 5, znamenka stotica 3, a djeljivi su s 25.
- 2. Odredi znamenke a i b u broju $\overline{78a9b}$ tako da bude djeljiv s 18. (5.r, Općinsko 1994.)
- 3. Odredi četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$ za koji vrijedi jednakost

$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2008,$$

pri čemu su znamenke a, b, c, d međusobno različite.

(5.r, Županijsko 2008.)

Literatura:

- D. Glasnović Gracin: Matematika 5 plus, Element, Zagreb, 2003.
- I. Mrkonjić, B. Copić: Matematika 5 za izbornu i dodatnu nastavu, Školske novine, Zagreb, 1996.
- V. Kadum, Z. Krneta, E. Kosić: Matematika za one koji žele i mogu više: zbirka zadataka za učenike 5. i 6. razreda osnovne škole, IGSA, Pula, 2000.
- Vinko i Mira Bajrović: Zbirka zadataka za dodatnu nastavu u 4.,5. i 6. razredu osnovne škole
- Mirjana Muštra: Dodatna nastava matematike za 5.razred osnovne škole
- B. i S. Ibrahimpašić, D. Kovačević, A. Šehanović: Pravila djeljivosti - Osječki matematički list 11(2011)
- Materijali dostupni na poveznici http://www.antonija-horvatek.from.hr/
- Grupa autora: Matematika 6, Radna bilježnica za darovite učenike u 6. r osnovne škole, Profil Klett, Zagreb, 2020.